Derivace, její význam, derivace funkce určené implicitně

Definice: Říkáme, že funkce f má v bodě x_o derivaci, jestliže existuje $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$. Tuto limitu označujeme $f'(x_o)$ a nazýváme ji derivací funkce f v bodě x_o.
(pozn. derivace vyjadřuje změnu funkce v co nejkratším intervalu)

Význam *(pouze v rozsahu učebnic gymnázia)*:
a) geometrický - hodnota derivace funkce f v bodě x_o je rovna směrnici tečny křivky, která je grafem funkce f, v bodě $[x_o; f(x_o)]$ - směrnice tečny je tangens směrového úhlu tečny
b) derivací funkce vyjadřující dráhu dostaneme funkci vyjadřující okamžitou rychlost, derivací funkce vyjadřující okamžitou rychlost dostaneme funkci vyjadřující zrychlení

Pravidla pro derivování
$(f \pm g)' = f' \pm g'$
$(c.f)' = c \,.\, f'$
$(f.g)' = f'.g + f.g'$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - f\,g'}{g^2}$
$[f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x)).\,\varphi'(x)$

Derivace elementárních funkcí	
$y = k$ .... $y' = 0$	$y = x^n$ ....$y' = n.x^{n-1}$
$y = \sin(x)$ ....$y' = \cos(x)$	$y = \cos(x)$ ....$y' = -\sin(x)$
$y = e^x$ ....$y' = e^x$	$y = a^x$ ....$y' = a^x.\ln a$
$y = \mathrm{tg}(x)$ ... $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \mathrm{cotg}(x)$ ... $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = \ln x$ ....$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \log_a x$ ....$y' = \dfrac{1}{x.\ln a}$

Poznámka: Někdy je při derivaci nutné funkci přepsat pomocí $e^{\ln a} = a$, např.: $y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ nebo $y = x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln x}$. Potom derivujeme jako složenou funkci.

Úloha: Doplňte do tabulky definiční obory funkcí i derivací!

Příklad 1: Je dána křivka f: $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ a její bod A[1;?]. Napište rovnici tečny v bodě A a určete její průsečík s osou x.

Řešení $f(1) = 1/2$.....A[1; 1/2] tečna má rovnici $y = k.x + q$, kde $k = f'(1)$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ $\Rightarrow$ $f'(1) = -1/2$ $\Rightarrow$ tečna má rovnici $y = -x/2 + q$, pro výpočet q dosadíme bod A[1; 1/2], který na tečně leží $\Rightarrow$ rovnice tečny je $y = -x/2 -1$, průsečík s osou tečny s osou x je [-2; 0]
Můžeme také použít rovnici tečny křivky $y - y_o = f'(x_o).(x - x_o)$, zde $y - 1/2 = f'(1).(x - 1)$.

Příklad 2: Derivujte dané funkce a udejte podmínky.

1) $y = \dfrac{\sqrt{x^3\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{17}{12}}$, x>0 .... $y' = \dfrac{17}{12}x^{\frac{5}{12}} = \dfrac{17}{12}\sqrt[12]{x^5}$, x>0

2) $y = x^4.\cos x$, D = R .... $y' = 4x^3.\cos x + x^4.(-\sin x)$, D = R

3) $y = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x}$, $x \neq (2k+1)\,\pi/2$ .... $y' = \dfrac{\cos x.\cos x - (\sin x + 1)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x + 1}{\cos^2 x}$

4) $y = -4\cos^3 x$, D = R .... $y' = -12\cos^2 x.(-\sin x)$, D = R

5) $y = x^2.\sqrt{x^4 - 1} = x^2.(x^4-1)^{\frac{1}{2}}$, D = $(-\infty;-1\rangle \cup \langle 1;\infty)$ ...... $y' = 2x(x^4-1)^{\frac{1}{2}} + x^2.\dfrac{1}{2}(x^4-1)^{-\frac{1}{2}}.4x^3$

6) $y = 5^x + 3\log_3 x$, x>0 .... $y' = 5^x \ln 5 + 3\dfrac{1}{x.\ln 3}$, x>0

7) $y = x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln x}$, x>0 .....$y' = e^{\sin x \ln x}\left(\cos x.\ln x + \sin x.\dfrac{1}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x.\ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$

Úlohy:

1) Derivujte a určete D(f) a D(f´): $y = x\sqrt[3]{x} - \frac{4\sqrt{x}}{x} + 2x - 3$. ....[$y' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} + 2\frac{1}{\sqrt{x^3}} + 2$; $x > 0$]

2) Derivujte a určete D(f) a D(f´): $y = x.\sqrt{1-x^2}$. ....[$y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $x \in \langle -1; 1\rangle$]

3) Určete rovnici tečny grafu funkce f:$y = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$ v bodě T[1; ?].

......[$y' = 2/(x+2)^2$, tečna má rovnici y= 2/9. x+1/9]

4) Najděte rovnici tečen křivky určené rovnicí f: $y = \frac{x+2}{x}$, které svírají s osou x úhel $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

.....[T[±√2; 1±√2], tečny jsou y = - x +1 ±2√2]

5) Najděte rovnici tečen křivky určené rovnicí f: $y = \sqrt{3x + \sqrt{x}}$ v bodě T[1; ?].

.....[y = 7/8. x + 9/8]

Derivace funkce vyjádřené implicitně

Příklad: Napište rovnici tečny kružnice $x^2 + y^2 = 10$ v bodě T[1; 3].
Řešení: Tuto úlohu umíme řešit metodami analytické geometrie ale dá se řešit i pomocí derivace. Rovnice kružnice není funkcí, ale kružnici můžeme chápat jako sjednocení dvou funkcí, $f_1: y = \sqrt{r^2 - x}$ a $f_2: y = -\sqrt{r^2 - x}$. Zadaný bod T[1; 3] leží na f_1 a je tedy možné postupovat jako v příkladu 1. Lze však užít **ještě další metodu.** Funkci f_1 se dá zapsat rovnicí $x^2 + y^2 = 10$, ale s podmínkou $y \geq 0$. V tomto vyjádření **není f_1** dána jasně, výslovně, zřetelně (tj. explicitně) ale je v rovnici schovaná, je vyjádřena nezřetelně, nejasně (tj. implicitně).

$x^2 + y^2 = 10$ lze také psát $x^2 + f(x)^2 = 10$

levá strana se rovná pravé ⇒ rovnají se i derivace levé a pravé strany

$(x^2 + f(x)^2)' = 0$ ....levou stranu derivuji jako složenou funkci, derivace pravé je 0

$$2x + 2.f'(x).f(x) = 0 \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{2.f(x)} = \frac{-x}{f(x)}$$

v konkrétním bodě T[1; 3] je $f'(x_0) = \frac{-x_0}{f(x_0)} = \frac{-1}{3}$ a to je směrnice naší tečny

tečna má tedy rovnici y= -1/3. x +10/3

Úlohy:

Určete rovnici tečny křivky v daném bodě:

1) $x^2 - 4y^2 = 16$, bod T[8;2√3] ....[tečna je x√3 - 3y - 2√3 = 0]
2) $5x^2 + y^2 = 25$, bod T[1; -2√5] ....[tečna je y = 0,5. √5.x - 2,5. √5]
3) $y^2 = 6x - 8$, bod T[2; 2] ....[tečna je y = 1,5x -1]
4) $9x^2 + y^2 - 9x - 4y = 0$, bod T[1; 0] ....[tečna je y = 9/4. x - 9/4]
5) $x^2 + y^2 + 2x - 17 = 0$, bod T[2; -3] ... [tečna je y = x - 5]

L'Hospitalovo pravidlo

- Jsou-li f(x) a g(x) fce. které mají derivace v jistém okolí a. Jestliže $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ pak platí:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pozn: užívá se i u limit $\frac{\infty}{\infty}$