22 a

Primitivní funkce

Definice: Funkce F(x) se nazývá <u>primitivní funkcí</u> k funkci f(x) v intervalu $(\alpha;\ \beta)$, jestliže pro všechna $x\in(\alpha;\ \beta)$ platí $F'(x) = f(x)$.

Věta: Nechť F(x) a G(x) jsou primitivní funkce k funkci f(x) v $(\alpha;\ \beta)$, pak pro všechna $x\in(\alpha;\ \beta)$ platí F(x) = G(x) + c, kde c je reální konstanta.

Definice: Je zvykem libovolnou z primitivních funkcí k funkci f(x) nazývat <u>neurčitým integrálem</u> a označovat symbolem $\int f(x).dx = F(x)+c, c\in R$. Číslo c nazýváme integrační konstanta.

Integrační pravidla:

$$\boxed{\begin{array}{l}\int k.f(x).dx = k.\int f(x).dx \\ \int (f(x)\pm g(x)).dx = \int f(x).dx \pm \int g(x).dx\end{array}}$$

Jednoduchá pravidla pro integraci součinu, podílu a složené funkce neexistují. Místo toho byly vypracovány různé substituční metody, metoda per partes apod.

Tabulka primitivních funkcí ke standardním funkcím

funkce	k ní primitivní
$y = x^n$	$y=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
y = c	y = cx
$y = e^x$	$y = e^x$
y = ln(x)	y = x.(ln(x)-1) ...*
$y = a^x$	$y = \dfrac{a^x}{\ln(a)}$ ....
$y = \dfrac{1}{x}$	y = ln(x) pro x>0 y = ln|x| pro x≠0

funkce	k ní primitivní
y = sin(x)	y = - cos(x)
y = cos(x)	y = sin (x)
y = tg(x)	y = - ln|cos(x)| ....*
y = cotg(x)	y = ln|sin(x)| ....*
$y = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	y = tg(x)
$y = \dfrac{1}{\sin^2(x)}$	y = - cotg(x)

Tabulku zkontrolujte a dopište definiční obory!

*....tyto integrály nebudou součástí zkoušky

Strategie: 1) Snažíme se mocniny, podíl popř. součin převést různými úpravami na součet nebo rozdíl!
2) Úlohy s goniometrickým funkcemi za pomoci vzorců na součet nebo rozdíl funkcí v pravé tabulce!

Příklad 1: Vypočtěte:

$$\int \frac{(x+3)^2(x-1)}{x^3}dx = \int \frac{(x^2+6x+9)(x-1)}{x^3}dx = \int \frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3}dx = \int\left(1+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{9}{x^3}\right)dx =$$

$$= x + 5.\ln(x) - \frac{3}{x}+\frac{9}{2x^2} + c,\ c\in R$$

Příklad 2: Vypočtěte:

$$\int\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx = \int\left(x-3\sqrt[3]{x^2}\frac{1}{\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{x}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)dx = \int\left(x-3x^{\frac{1}{6}}+3x^{\frac{-2}{3}}-x^{\frac{-3}{2}}\right)dx =$$

$$=\frac{x^2}{2}-3.\frac{6}{7}.x^{\frac{7}{6}}+3.3.x^{\frac{1}{3}}-(-2)x^{\frac{-1}{2}}+c,\ c\in R$$

Příklad 3: Vypočtěte:

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x.\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x.\sin^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = -\cot g(x) - tg)x) + c,\quad c \in R$$

Úlohy: Vypočtěte:

1) $\int (x^2-1)(x+2)^2\,dx$ .... $\left[\frac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x + c, x \in R\right]$

2) $\int \sqrt[5]{\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}}\,dx$ .... $\left[\frac{30}{37}x\sqrt[30]{x^7} + c, x > 0\right]$

3) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[4]{x^3}\right)dx$ .... $\left[4\sqrt{x} + 9\sqrt[3]{x} - \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + c, x > 0\right]$

4) $\int (2.5^x - 4\cos(x) + k).dx, k\ je\ konst$ .... $\left[2\frac{5^x}{\ln 5} - 4.\sin(x) + kx + c, x \in R\right]$

5) $\int tg^2 x.dx$ .... $\left[tg(x) - x + c, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$

6) $\int \cot g^2 x.dx$ .... $[-\cot g(x) - x + c, x \neq k\pi]$

7) $\int \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx$ .... $\left[tg(x) - \cot g(x) + c, x \neq k\frac{\pi}{2}\right]$

8) $\int\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$ .... $[x + \cos(x) + c,\ x \in R]$

9) $\int (3.2^x + 2.3^x)dx$ .... $\left[3.\frac{2^x}{\ln 2} + 2.\frac{3^x}{\ln 3} + c,\ x \in R\right]$

10) $\int\left(5^x + x^5 + 5x + \frac{5}{x} + 5\right)dx$ .... $\left[\frac{5^x}{\ln 5} + \frac{x^6}{6} + 5\frac{x^2}{2} + 5\ln x + 5x + c, x > 0\right]$