

Vyšetřování průběhu funkce pomocí derivací funkce

1. Určíme **definiční obor funkce**. Určíme tedy množinu, na které budeme kreslit graf a **body nespojitosti**. Ty vyznačíme na ose x a sestrojíme kolmice k ose x v těchto bodech, např. čárkovaně. Tyto čárkované kolmice v bodech nespojitosti graf neprotne, mezi nimi je grafem funkce nepřerušovaná (tj. spojitá) čára.
2. Určíme, zda je funkce **sudá** (graf je souměrný podle osy y) nebo **lichá** (graf je souměrný podle počátku soustavy souřadné), popř. periodická.
3. Určíme **průsečík s osou y** (polož $x = 0$) a pokud lze dostupnými metodami vypočítat i **průsečíky s osou x** (polož za $y = 0$).
4. Vypočteme **limity funkce pro $x \rightarrow +\infty$ a $x \rightarrow -\infty$** a popř. také **limity zleva a zprava v bodech nespojitosti**. Je-li alespoň jedna jednostranná limita v bodech nespojitosti nevlastní, nazveme kolmici na osu x **asymptotou grafu funkce f bez směrnice**.
5. Vypočteme **první derivaci** funkce a určíme body, ve kterých je derivace $f'(x) = 0$, tzv. **stacionární body**. Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech a zakreslíme je.
Platí věta: Jestliže má funkce f v každém bodě intervalu $(a;b)$ spojitou první derivaci a v bodě $c \in (a;b)$ má lokální extrém, pak $f'(c) = 0$.
Z toho plyne, že body „podezřelé z extrému“ jsou jednak stacionární body a jednak body, ve kterých nemá funkce spojitou první derivaci. Musíme tedy kromě nulových bodů derivace zjistit i body, ve kterých není první derivace spojitá.

Při zjišťování průběhu funkce často také využijeme větu:

Věta: Nechť funkce f má v každém bodě intervalu $(c;d)$ první derivaci, $\langle a;b \rangle \subset (c;d)$.

a) Jestliže $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (a;b)$, pak f je v intervalu $\langle a;b \rangle$ rostoucí.

b) Jestliže $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in (a;b)$, pak f je v intervalu $\langle a;b \rangle$ klesající.

6. Vypočteme **druhou derivaci** funkce. Ta nám pomůže při upřesnění lokálních extrémů (tj. který z podezřelých je extrém a zda je to maximum nebo minimum), při zjištění inflexních bodů a při určení intervalů, ve kterých je funkce konvexní a konkávní.

Platí věta: Nechť funkce f má v intervalu $(a;b)$ spojitou druhou derivaci a $c \in (a;b)$. Jestliže

*a) $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0$, pak $f(x)$ má v bodě c **lokální minimum***

*b) $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0$, pak $f(x)$ má v bodě c **lokální maximum***

Podle této věty určíme lokální extrémy. Nezapomeneme na předpoklad věty, že druhá derivace musí být v nějakém intervalu obsahujícím bod c spojitá. Tato věta nám nepomůže vypořádat se s body, které mají druhou derivaci 0, to by mohli být tzv. inflexní body.

*Definice: Nechť je funkce definována v intervalu, který má tuto vlastnost: Jsou-li x_1, x_2, x_3 čísla z tohoto intervalu splňující nerovnost $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $P_2 = [x_2; f(x_2)]$ buďto pod přímkou spojující body $P_1 = [x_1; f(x_1)]$, $P_3 = [x_3; f(x_3)]$ nebo na ní. Potom řekneme, že $f(x)$ je v tomto intervalu **konvexní**. Jestliže v definici nahradíme slovo pod slovem nad, dostaneme definici funkce **konkávní**.*

*Poznámka: Funkce **konvexní** tvoří jakési **U** nebo **V**, je vždy nad svými tečnami.*

*Funkce **konkávní** tvoří jakési **zakulatonné A**, je vždy pod svými tečnami.*

Věta: Nechť je funkce f spojitá v intervalu $(a;b)$ a má v každém bodě tohoto intervalu druhou derivaci. Pak platí: a) f je konvexní v $(a;b) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ pro všechna $x \in (a;b)$

b) f je konkávní v $(a;b) \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ pro všechna $x \in (a;b)$

*Definice: Jestliže $f''(c) = 0$ a $f''(x)$ nemění v bodě c znaménko, pak říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě c **inflexní bod**.*

Vypočteme funkční hodnoty v **inflexních bodech** a zakreslíme je. V inflexním bodě mění znaménko pouze druhá derivace, takže se zde mění konvexnost na konkávnost nebo naopak. Pokud v tomto bodě uděláme tečnu, přechází zde křivka z jedné strany tečny na druhou. Funkce je přitom stále rostoucí nebo klesající.

Je vhodné sestrojit tečny v inflexních bodech $y - y_0 = f''(x_0)(x - x_0)$, kde $T[x_0, y_0]$ je bod dotyku (tj. inflexní bod) a tečny v $\pm\infty$, tzv. asymptoty. Přímkou $y = ax + b$ nazveme asymptotou se

směrnici grafu funkce f , jestliže $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$, stejně pro $x \rightarrow -\infty$.

Pokud vyjdou limity $\pm\infty$, asymptoty neexistují.

Příklad 1: Vyšetřete průběh funkce: $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{1 + x^2}$... tento je k maturitě příliš pracný

1. definiční obor je \mathbb{R}

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = 1$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = 1$

3. funkce není sudá ani lichá ani periodická, průsečík s osou y (tj. $f(0) = 1$) je $P[0; 1]$
 průsečík s osou x (tj. $y = 0$) vypočteme z rovnice $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow Q[1; 0]$

4. první derivace po úpravě je $y' = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$, takže stacionární body jsou 1 a -1, derivace je

spojitá v \mathbb{R} , takže jinde nemohou být extrémy

5. druhá derivace je $y'' = 2 \frac{2x(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1)2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{4x(x^2 + 1)(-x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^4}$

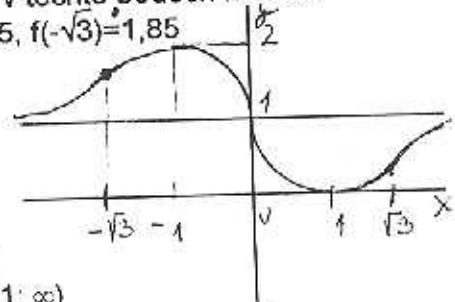
$f''(1) > 0 \Rightarrow$ v 1 je lokální minimum a $f(1) = 0$

$f''(-1) < 0 \Rightarrow$ v -1 je lokální maximum a $f(-1) = 0$

6. druhá derivace je rovna nule v bodech 0, $\sqrt{3}$ a $-\sqrt{3}$, a f' v těchto bodech nemění znaménko, jsou to tedy inflexní body ... $f(0) = 1$, $f(\sqrt{3}) = 0,15$, $f(-\sqrt{3}) = 1,85$

f'' je kladná a tedy f je konvexní v $(-\infty; -\sqrt{3})$ a v $(0; \sqrt{3})$

f'' je záporná a tedy f je konkávní v $(-\sqrt{3}; 0)$ a v $(\sqrt{3}; \infty)$



Příklad 2: Vyšetřete průběh funkce: $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}$

1. definiční obor je $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, tj. body nespojitosti jsou 0 a 1
 intervaly, ve kterých je funkce spojitá jsou $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \infty)$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) = -\infty$

3. funkce není sudá ani lichá ani periodická

průsečík s osou y neexistuje, průsečík s osou x vypočteme z rovnice $f(x) = 0 \Rightarrow P[1/2; 0]$

4. $y' = -x^{-2} - (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) = -x^{-2} - (1-x)^{-2}$, je spojitá v $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ a je vždy záporná \Rightarrow funkce klesá v každém z intervalů $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \infty)$

y je vždy různá od nuly $\Rightarrow f$ nemá extrémy (f' není definovaná v 0 a 1, ale f také ne)

5. $y'' = 2x^{-3} + 2 \cdot (1-x)^{-3} \cdot (-1) = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{(1-x)^3}$, $y'' = 0$ pro $x = 1/2$ a protože v tomto bodě

nemění první derivace znaménko, je to inflexní bod $f(1/2) = 0$

$f'' > 0$ pro $x \in (0; 1/2)$ a $x \in (1; \infty) \Rightarrow$ zde konvexní, ve zbytku $D(f)$ konkávní

Úlohy: Vyšetřete průběh funkce: inflexní body a konvexnost a konkávnost se pravděpodobně u maturity nestihnou

1) $f: y = x^4 - 2x^2$ 2) $y = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$

3) $f: y = \frac{x}{1-x^2}$ 4) $y = x^4 - 2x^2 - 5$

5) $f: y = \frac{1}{1+x^2}$ 6) $f: y = \frac{x^2 + 4}{x}$

